

階級対応の税制と資本主義の安定性

-二部門二階級経済モデルにおけるナイフ・エッジの形成-

Class-Based Tax System and the Stability of Capitalism

-Formation of a Knife-Edge in the Two-Sector and Two-Class Economic Model-

明石昭生（久留米大学大学院比較文化研究科後期博士課程）

Akio AKASHI

Graduate School of Comparative Studies of International Cultures and Societies,
Kurume University

2024 年 8 月 22 日

日本経済政策学会西日本部会

Japan Economic Policy Association

Nishi-Nippon Branch

【研究論文】

階級対応の税制と資本主義の安定性
- 二部門二階級経済モデルにおけるナイフ・エッジの形成 -

Class-Based Tax System and the Stability of Capitalism
-Formation of a Knife-Edge in the Two-Sector and Two-Class Economic Model-

明石 昭生(久留米大学大学院比較文化研究科後期博士課程)
Akio AKASHI, Graduate School of Comparative Studies of International
Cultures and Societies, Kurume University

要約

本稿では、二部門・二階級を持つ動学マクロ経済モデルを構成し、経済の安定性分析を行う。経済の安定性分析を行う理論的研究の多くは、生産関数に二回微分が負の関数を用いている。それは均衡点の存在と安定性を保証する上で必要だからである。しかし、本稿では、二部門二階級の生産関数に線形生産関数を採用し、固有ベクトルに依存しない平衡点への収束を実現させる経済政策を提案する。

Abstract

This study constructs a dynamic macroeconomic model with two-sector and two-class and analyzes economic stability. Most theoretical studies that analyze economic stability use production functions which second derivative is negative. This guarantees the existence and stability of the equilibrium point.

However, this study adopts linear production functions rather than functions which second derivative is negative. We propose an economic policy that achieves convergence to the equilibrium point independent of eigenvectors.

キーワード: 二部門・二階級経済モデル、最適制御理論、新ナイフ・エッジ経路、
平衡点の安定性、労働資本比率

Keywords: Two-sector and two-class economic model, Optimal control theory,
New knife-edge path for equilibrium, Stability of equilibrium point,
Labor-capital ratio

JEL 区分: E27, E60, O00, P10, P19

1. はじめに

本稿では、二部門二階級経済モデルにおける経済の安定性について考察する。二部門とは消費財生産部門と資本財生産部門であり、二階級とは資本家階級と労働者階級である。資本主義経済では、資本家と労働者の貯蓄は資産市場を経由して生産部門に投資される。本稿では、このマクロ経済構造の中で、経済を安定な状況に誘導する経済政策について分析する。ただし、二部門・二階級モデルを論ずる場合、先行研究として、二部門経済モデルおよび二階級経済モデルを考察し、それぞれのモデルが含む構造とその理論的帰結を精査しなければならない。

まず、二階級モデルについて考察を行う。二階級経済モデルを構築したのは Kaldor [1955-56] である。成長と分配の諸理論を考察したこの業績は、ケインズ派理論に二階級モデルを導入し、富の分配および資本家と労働者の貯蓄率が経済成長に与える影響を分析している。ここでは、Kaldor の基本方程式がモデルの軸を形成している。この Kaldor の議論は、ポスト・ケインジアンにおける資本論争の中心的役割を果たすことになる。その後、この二階級経済モデルの応用として登場したのが、微分ゲームを応用した Lancaster [1973] である。この研究は、資本主義経済を多段階的意思決定過程と捉え、その上でマクロ経済における生産の効率性分析を試みている。すなわち、この業績では、資本家と労働者をプレイヤーとする分権的意思決定過程が設定され、富の分配および貯蓄＝投資のマクロ経済構造が導入されて、GDP の効率的生産に分析の焦点が当てられてきた。この微分ゲーム経済モデルでは、Lancaster [1973] を起点として、Basar, Haurie and Ricci [1985]、Pohjola [1983, 1985, 1986]、Malueg and Tsutsui [1997] など数多くのゲーム理論研究者による研究成果が報告されている。ただし、ここで注意したいのは、Lancaster [1973] が線形の生産関数を用いていたのに対し、その後のすべての研究では、ナッシュ均衡の存在を確保するために（すなわちゲームの安定性を保証するために）、非線形の生産関数を採用している点である。この点は、本稿の主題の一つとなる。

二階級経済モデルのもう一つの先駆的研究として、Goodwin [1967] および Goodwin [1983] をあげなくてはならない。Goodwin の変動理論は、富の利潤と賃金への分配という資本主義経済が持つ基本的構造を分析している。ここでは、生物学の Lotka-Volterra 方程式（捕食者・被捕食者モデル）を応用し、利潤率と失業率の周期的モデルを考察している。Goodwin [1986] は、さらにそれを一般座標を用いた理論に拡張し、変動経路がノイマン経路を中心として揺り動くモデルを構成した。このモデルの特徴の 1 つは、技術革新を含むモデルであるという点であり、技術革新が経済成長の原動力を成している。

一方、二部門経済モデルを構築したのは、Uzawa [1961-1962] である。このモデルは、その後、稲田・宇沢 [1972] に収録されている。

二部門経済モデルにおいて問題となるのは、労働資本比率である。Uzawa [1961-1962] のモデルは、消費財生産部門と資本財生産部門で構成され、各部門は、利潤最大化条件にしたがい行動する。すなわち、第 1 部門では、労働の限界生産物が賃金率に、第 2 部門では、資

本の限界生産物が資本のレンタル価格に等しくなるよう意思決定される。ただし、2つの部門の労働資本比率がどのように決まるかということに関する分析はなされていない。また、稲田・宇沢[1972]では、新古典派の成長モデルおよびマルクスの成長理論に関する考察が行われているが、ここでも、2つの部門の労働資本比率に関する分析はない。この二部門経済モデルでは、その後、数多くの業績が生み出されてきたが、経済成長論における近年の業績ではTakahashi, Mashiya and Sakagami[2012]などが注目される。ただし、ここで注意したいのは、二部門経済モデルの多くの研究では、経済の安定性を保証するために、非線形の生産関数を採用している点である。前述のように、この点は、本稿の主題の一つとなる。

以上、二階級経済モデルおよび二部門経済モデルについて考察してきたが、両者を統合した二部門二階級モデルを構築し、これを分析した業績としてAkimoto[1985]を取り上げることができる。ここでは、Kaldor 方程式を導入した上で、Goodwin の Lotka-Volterra 方程式を含むモデルを構築している。分析の結論として、経済の安定性を支配するのが、二部門経済における労働資本比率であることが示されている。ただし、資本ストックの各部門への配分は2つの部門で共通した1つの利潤率の決定と同時になされている点に注意したい。すなわち、Kaldor の基本方程式が成立するように各部門に資本が配分されていた。

ただし、資本主義経済において貯蓄が投資に還流する場合、その過程の中に金融システムが介在し、資本家（あるいは投資家）の意思決定が問題となる点に注意しなければならない。すなわち、モデルに利潤を最大化すべき資本家の行動が組み込まれなくてはならない。このプロセスをモデルに組み込んで二部門二階級モデルを構成し、これを分析したのがAkimoto[2016]である。このモデルでは、資本家、労働者および資本市場（資本ストックの配分者）がゲームのプレイヤーとして設定されている。それぞれのプレイヤーの戦略は、貯蓄率および資本の分配率である。Akimoto[2016]は、ゲームにナッシュ均衡が存在し、この均衡が自然経済と二部門のバランス成長経路を達成することを示している。しかし、このモデルではナッシュ均衡が選択されるので、意思決定に関する動学的プロセスは見えてこないという難点が存在する。そこで本稿では、Akimoto[2016]では分析できなかった意思決定の動学的プロセスを問題とする。すなわち、各部門への資本分配において、最適制御の理論を取り入れる。

ここで、生産関数の線形性あるいは非線形性について考察を行う。二部門二階級モデルにおける経済の分析は、1960年代より、多くの著名な研究者が重要な研究成果を発表してきた。しかし、経済成長論あるいは所得分配論の研究が辿ってきた軌跡を振り返ると、それは、経済の安定性に関する理論的帰結を得るために、生産関数に、コブ・ダグラス型生産関数に代表される収穫通減法則を満たす生産関数を採用してきたという経緯を持つ。

たとえば、その最たる例として、ソロー=スワン・モデル(Solow[1956], Swan[1956])とハロッド=ドーマー・モデル(Harrod [1939, 1948], Domar[1946, 1957])を考えるとよい。前者では、安定性を担保する収穫通減法則を持つ生産関数が採用される。この仮定が、経済の安定性を保証していた。ここでの特徴は、資本産出比率が迅速に変化することができる点に

ある。しかし、現実の経済において、少なくとも短期・中期では、資本産出比率が柔軟かつ迅速に変動するのは困難であると考えられる。このとき、この資本産出比率が一定であると仮定すると、生産関数は、線形生産関数となる。そして、ハロッド=ドーマーのナイフ・エッジ理論は、この線形生産関数を土台として構築されている。したがって、生産関数の形状が経済の安定性の理論的バックボーンであるとする、線形生産関数を用いて経済の不安定性を克服する試みは、新しい試みと言える。このような事態を鑑み、本稿では敢えて線形生産関数を導入し、通常最適制御にみられるような Saddle Point を構成する固有ベクトルを応用して、平衡点に経路を誘導するという手法とは異なる新たな制御理論の構築を試みる。

2. 二階級に対応する税制による経済安定化政策のナイフ・エッジ理論

2.1 モデル

二部門二階級モデルを用いてモデルを構成する。まず、二部門モデルを構成する。経済の生産部門は、消費財生産部門と資本財生産部門の2つの部門から構成されるものとする。消費財生産部門および資本財生産部門をそれぞれ第1部門、第2部門とよび、それぞれに添え字 $i = 1, 2$ を割り当てる。各部門の生産は、資本と労働を投入して行われるものとする。いま、経済全体の資本ストックを K で表す。資本ストック K は、 v および $1 - v$ の比率で、第1部門および第2部門にそれぞれ投入される。ただし、 $0 \leq v \leq 1$ である。変数 v は、すぐ後で説明するように、利潤の最大化を目的とする資本家の戦略である。いま、第 i 部門の資本産出係数および生産額をそれぞれ b_i 、 X_i ($i = 1, 2$) で表すと、

$$X_1 = \frac{1}{b_1} v K \quad (2.1)$$

$$X_2 = \frac{1}{b_2} (1 - v) K \quad (2.2)$$

となる。経済全体の生産額（すなわち GDP） Y は、

$$Y = X_1 + X_2 \quad (2.3)$$

となる。このとき、第 i 部門の労働投入係数および雇用量をそれぞれ n_i 、 N_i で表すと、

$$N_i = n_i X_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

$$N = N_1 + N_2 \quad (2.5)$$

となる。ここで、 N は経済全体の雇用量を表す。

一方、生産過程において発生する資本減耗を δ で表すと、資本ストック K に関する微分方程式系は、

$$\dot{K} = X_2 - \delta K + G \quad (2.6)$$

となる。ここで、ドット ($\dot{\cdot}$) は、 $\equiv \frac{d}{dt}$ で、 t は時間である。また、 G は経済成長を支えるための政府の公共投資を表す。ただし、われわれは生産的な経済を考えているので、 δ につ

いては次の仮定をおく。

$$\text{仮定 2.1} \quad \frac{1}{b_2} - \delta > 0 \quad (2.7)$$

すなわち、1 単位の資本投入により生産される資本は、資本減耗率より大きい。さらに、資本ストックに関しては次の仮定をおく。

仮定 2.2 資本ストックは、生産のために完全利用される。

仮定 2.3 資本ストックは 2 部門の間で自由に移動できる。

次に、二階級を導入してマクロ経済モデルを構築する。すなわち、経済の主体は資本家と労働者で構成されているものとする。賃金率および利潤率をそれぞれ w 、 π で表し、総利潤および総賃金をそれぞれ Π 、 W とすると、

$$\Pi = \pi K \quad (2.8)$$

$$W = wN \quad (2.9)$$

となる。ここで、賃金率 w は、経済全体の資本ストック K に比例するものとし、

$$w = \alpha K \quad (2.10)$$

とおく。すなわち、資本ストックの増加とそれにともなう生産量の増加に比例して、賃金率が上昇するものとする。

次に、マクロ経済において貯蓄が資本市場を経由して投資となり、生産過程に資金が還流するシステムを定式化する。まず、資本家と労働者の限界貯蓄性向をそれぞれ s_c および s_w で表し、次の仮定をおく。

$$\text{仮定 2.4} \quad 0 < s_w < s_c < 1$$

すなわち、資本家の貯蓄率は労働者のそれよりも大きいものとする。このとき、総貯蓄 S は、

$$S = s_c \Pi (1 - t_c) + s_w W (1 - t_w) \quad (2.11)$$

となる。ここで、 t_c および t_w は、利潤 Π および賃金 W に対する税率を表す。 t_c および t_w は、 $0 \leq t_c \leq 1$ および $0 \leq t_w \leq 1$ で、政府がこれを決定できるものとする。

次に、われわれは資本主義経済を考えているので、貯蓄は投資に還流しなければならない。すなわち、 $I(= \dot{K}) = S$ であるので、財市場の均衡条件より、

$$\dot{K} = s_c \Pi (1 - t_c) + s_w W (1 - t_w) \quad (2.12)$$

を得る。(2.12) はカルドアの基本方程式である。一方、 $\Pi t_c + W t_w$ なる税金を得た政府が、これより、経済成長を支えるために、税金のうち g ($0 \leq g \leq 1$) の割合を第 2 部門に公共投資

するものとする。すなわち、(2.6)において、

$$G = g(\Pi t_c + W t_w) \quad (2.13)$$

である¹。この公共投資係数 g に関しては、次の仮定を置く。

仮定 2.5 $g < \delta$

すなわち、政府は、税収のうち第2部門に公共投資される率が資本ストックの減価償却率を超えないように意思決定をするものとする。このとき、(2.6)は、

$$\dot{K} = X_2 - \delta K + g(\Pi t_c + W t_w) \quad (2.14)$$

となる。

以上の準備のもとで、資本家の問題を以下のように定義する。

$$\text{Max}_v \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \Pi dt \quad (2.15)$$

$$\text{s. t.} \quad (2.14)$$

すなわち、資本家は時間を通して利潤最大化を図る。ここで、 $\rho(>0)$ は資本家の時間選考率を表すが、 ρ に関しては、次の仮定をおく。

仮定 2.6 $\rho < \frac{1}{b_2} - \delta$ (2.16)

(2.16)の右辺は、資本財1単位が生産されたときの純生産になるが、時間選好率 ρ はこれより小さいものと仮定する。

以上、ここまでにおいて、導入された未知数は X_1 、 X_2 、 K 、 N 、 N_1 、 N_2 、 π 、 w 、 Π 、 W 、 Y 、 v 、 S 、 G の14個で、定義された方程式は(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4)×2、(2.5)、(2.6)、(2.8)、(2.9)、(2.10)、(2.11)、(2.12)、(2.13)、(2.15)の14本である。すなわち、モデルはこれで完結する。

2.2 モデルの分析

2.2.1 モデルの整理

まず、(2.1)、(2.2)、(2.4)、(2.5)および(2.10)を(2.9)に代入すると、

$$W = \left\{ \frac{n_2}{b_2} - \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) v \right\} \alpha K^2 \quad (2.17)$$

¹ 税収の残り $(1-g)(\Pi t_c + W t_w)$ は、経済政策以外の政策（たとえば、福祉、社会保障、教育、防衛など）に投入すると考える。

を得る。そして、(2.2)、(2.12)、(2.14)および(2.17)より、

$$\pi = \frac{\frac{1}{b_2}(1-v) - \delta - \left\{ \frac{n_2}{b_2} - \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) v \right\} \{s_w - (s_w + g)t_w\}w}{s_c - (s_c + g)t_c} \quad (2.18)$$

を得る。このとき、最適制御問題(2.15)に対するハミルトニアン H_c は、

$$\begin{aligned} H_c &= \pi K + \lambda_c K \left[\frac{1}{b_2}(1-v) - \delta + g \left[\left\{ \frac{n_2}{b_2} - \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) v \right\} w t_w + \pi t_c \right] \right] \\ &= (1 + \lambda_c g t_c) \pi K + \lambda_c K \left[\frac{1}{b_2}(1-v) - \delta + g \left\{ \frac{n_2}{b_2} - \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) v \right\} w t_w \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。さらに、(2.19)に(2.18)を代入して整理すると、

$$H_c = Mv + NK \quad (2.20)$$

を得る。ただし、ここで、

$$\begin{aligned} M &= \left(-\frac{1}{b_2} \right) \left\{ \frac{1 + \lambda_c g t_c}{s_c - (s_c + g)t_c} + \lambda_c \right\} K \\ &\quad + \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) \frac{(1-t_w)s_w + \lambda_c g \{ (t_c s_w - t_w s_c) + t_w t_c (s_c - s_w) \}}{s_c - (s_c + g)t_c} \alpha K^2, \\ N &= \frac{1 + \lambda_c g t_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \left[\frac{1}{b_2} - \delta - \frac{n_2}{b_2} (\alpha K) \{s_w - (s_w + g)t_w\} \right] \\ &\quad + \lambda_c \left\{ \frac{1}{b_2} - \delta + g \frac{n_2}{b_2} (\alpha K) t_w \right\} \end{aligned}$$

である。このとき、 H_c は制御変数 v に関する一次式なので、最大値原理より、最適化条件は以下のようになる。

$$\begin{cases} M > 0 \text{ のときは、} v = 1 \\ M < 0 \text{ のときは、} v = 0, \\ M = 0 \text{ のときは、} v (\in [0,1]) \text{ は任意。} \end{cases} \quad (2.21)$$

そこで、 M のグラフを描くと、図 2.1 のようになる。

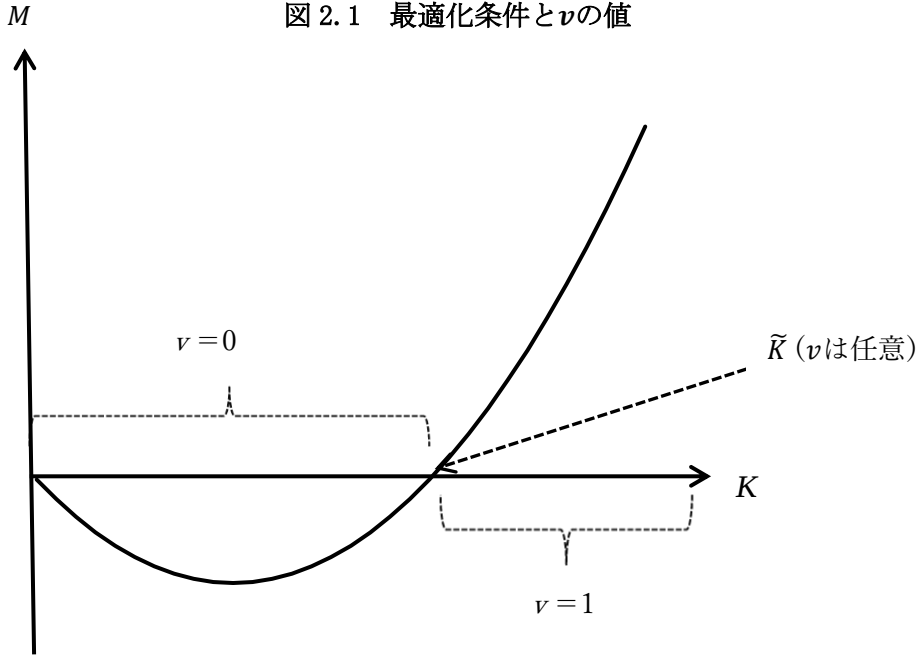


図 2.1 において、 $M = 0$ を満足する資本ストックを $\tilde{K}(> 0)$ で示す。すなわち、

$$\tilde{K} = \frac{s_c - (s_c + g)t_c}{\left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1}\right)[(1-t_w)s_w + \lambda_c g\{(t_c s_w - t_w s_c) + t_w t_c (s_c - s_w)\}]} \quad (2.22)$$

である。ここで、線形の生産関数を持つモデルにおいて、経済の安定性を確保するためには、明らかに $\tilde{K} > 0$ であることを必要とする。

そのためには、仮定 2.4 より $s_c > s_w$ であり、 $1 - t_w > 0$ であるので、(2.22)の右辺の分子に関し、 $s_c - (s_c + g)t_c > 0$ が成立し、同分母に含まれる $t_c s_w - t_w s_c$ が正であり、さらに $\frac{n_1}{b_1} <$

$\frac{n_2}{b_2}$ であれば、 $\tilde{K} > 0$ が成立する。われわれは、これを仮定としておく。

仮定 2.7 $\frac{n_1}{b_1} < \frac{n_2}{b_2}$ とする。

仮定 2.8 政府は、 $\frac{s_c}{s_w} t_w < t_c < \frac{s_c}{s_c + g}$ を満たすように、税率 t_w および t_c 、公共投資係数 g を選択する。

このとき、(2.22)より、以下の補題を得る。

補題 2.1 最適化条件を満足する v の値は、以下のようになる。

$$\begin{cases} 0 < K < \tilde{K} \text{ のときは、 } v = 0, \\ \tilde{K} < K \text{ のときは、 } v = 1, \\ K = \tilde{K} \text{ のときは、 } v \in [0,1] \text{ は任意。} \end{cases} \quad (2.23)$$

ここで、(2.2)、(2.8)、(2.17)および(2.18)を(2.14)に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \dot{K} = & \frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c} \left(\frac{1}{b_2} - \delta \right) K \\ & + \frac{g(t_c-t_w)\{t_ct_w(s_c-s_w)+t_w g(t_c-t_w)\}}{s_c-(s_c+g)t_c} \left\{ \frac{n_2}{b_2} - \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) v \right\} \alpha K^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

を得る。次に、(2.15)に対する随伴方程式

$$\dot{\lambda}_c = \rho \lambda_c - \frac{\partial H_c}{\partial K}$$

を分析しよう。(2.20)を用いて、上式を整理すると、

$$\dot{\lambda}_c = (\rho - \Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4) \lambda_c - \Theta \quad (2.25)$$

となる。ただし、

$$\Lambda_1 = \frac{gt_c}{s_c-(s_c+g)t_c} \left[-\frac{1}{b_2} + \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha K) \{s_w - (s_w + g)t_w\} \right] v,$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \frac{1}{b_2} + g \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha K) t_w \right\} v,$$

$$\Lambda_3 = \frac{gt_c}{s_c-(s_c+g)t_c} \left[\frac{1}{b_2} - \delta - \left(\frac{n_2}{b_2} \right) (2\alpha K) \{s_w - (s_w + g)t_w\} \right],$$

$$\Lambda_4 = \left\{ \frac{1}{b_2} - \delta - g \left(\frac{n_2}{b_2} \right) (2\alpha K) t_w \right\},$$

$$\Theta = \frac{1}{s_c-(s_c+g)t_c} \left[\frac{1}{b_2} (1-v) - \frac{n_1}{b_1} (2\alpha K) \{s_w - (s_w + g)t_w\} v \right]$$

である。

2.2.2 微分方程式の解析

(2.24)および(2.25)で構成される微分方程式を解析する。このとき、(2.21)に鑑み、 $v = 0$ および $v = 1$ の場合より分析を行う。そののちに、 v が任意の値をとる場合を考える。

(i) $v = 0$ のとき

安定性分析は、通常の平衡点における線形近似法を用いるので、 $v = 0$ に対応する平衡点 K_0^* 、 λ_{c0}^* を求めると²、

² $K_0^* = 0$ も(2.24)の平衡点であるが、本稿の分析において、 $K_0^* = 0$ は意味を持たないので、ここではこれを記さない。

$$K_0^* = \frac{\frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{1}{b_2}-\delta\right)}{g(t_c-t_w)\{t_ct_w(s_c-s_w)+t_wg(t_c-t_w)\}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha)} \quad (2.26)$$

$$\lambda_{c0}^* = \frac{-s_w\frac{s_w}{s_c}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha K_0^*)K_0^*}{\rho - \frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{1}{b_2}-\delta\right) + \left\{\frac{1}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha K_0^*)t_c - g\left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha K_0^*)t_w\right\}K_0^*} \quad (2.27)$$

となる。(2.26)において、平衡点 K_0^* は $K_0^* > 0$ であることが望まれる。したがって、政府は税制に関し、 $v = 0$ のときは、 $t_w < t_c$ となる税制を採用することが望まれるが、仮定 2.8 よりこの条件は満たされる。

このもとで、 $v = 0$ のときの(2.24)および(2.25)で構成される系を整理すると以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{\lambda}_c \end{pmatrix} = R_0 \begin{pmatrix} K \\ \lambda_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

ここで、 $R_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ で、

$$A_{11} = \frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{1}{b_2}-\delta\right) + \frac{g(t_c-t_w)\{t_ct_w(s_c-s_w)+t_wg(t_c-t_w)\}}{1-(1+g)t_c}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)2\alpha K_0^*$$

$$A_{21} = \left\{\frac{1+\lambda_{c0}^*gt_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha)t_w - \left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha)t_w\right\}\lambda_{c0}^* + \frac{s_w-(s_w+g)t_w}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha)$$

$$A_{22} = \rho - \frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{1}{b_2}-\delta\right) + \left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha)\left\{\frac{s_w-(s_w+g)t_w}{s_c-(s_c+g)t_c} - gt_w\right\}K_0^*$$

である。 R_0 の固有値 μ_1^0 および μ_2^0 は、

$$\mu_1^0 = \frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{1}{b_2}-\delta\right) + \frac{gs_w(t_c-t_w)\{t_ct_w(s_c-s_w)+t_wg(t_c-t_w)\}}{1-(1+g)t_c}\left(\frac{n_2}{b_2}\right)2\alpha K_0^* \quad (2.29)$$

$$\mu_2^0 = \rho - \frac{(1-t_c)s_c}{s_c-(s_c+g)t_c}\left(\frac{1}{b_2}-\delta\right) + \left(\frac{n_2}{b_2}\right)(2\alpha)\left\{\frac{s_w-(s_w+g)t_w}{s_c-(s_c+g)t_c} - gt_w\right\}K_0^* \quad (2.30)$$

となる。ここで、固有値 μ_1^0 に対応する固有ベクトルをもとめると、

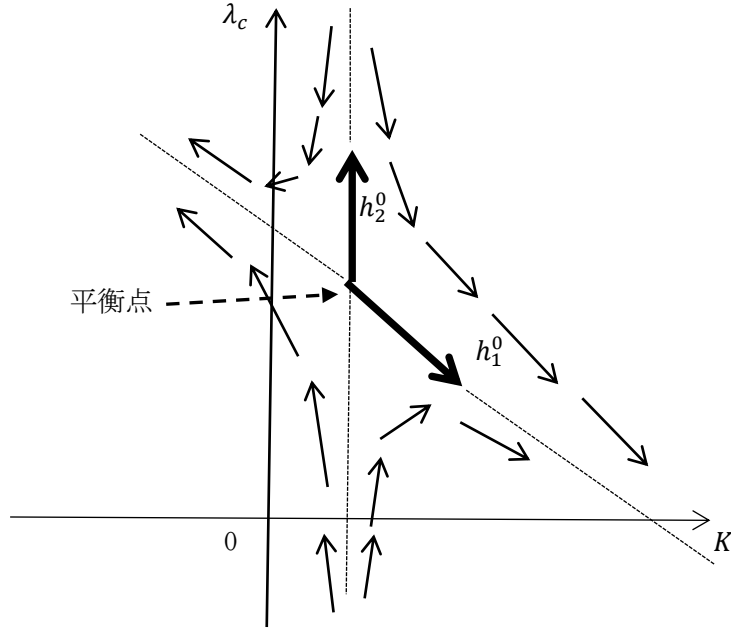
$$h_1^0 = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^0 - A_{22} \\ A_{21} \end{pmatrix}$$

となり、固有値 μ_2^0 に対応する固有ベクトルをもとめると、

$$h_2^0 = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、平衡点における安定性分析を行う。(2.29)は、仮定 2.1 と仮定 2.4 そして仮定 2.8 より $\mu_1^0 > 0$ である。一方、(2.30)において、 μ_2^0 の符号は確定しないが、 $\mu_2^0 > 0$ ならば、平衡点は不安定結節点となり、 $\mu_2^0 < 0$ ならば、平衡点は Saddle Point となる。例として、平衡点が Saddle Point である場合の平衡点近傍での位相図は、図 2.2 のようになる。

図 2.2 $v = 0$ のとき



(ii) $v = 1$ のとき

$v = 0$ と同様に、 $v = 1$ に対応する平衡点 K_1^* 、 λ_{c1}^* を求めると³、

$$K_1^* = \frac{\frac{(1-t_c)s_c}{s_c - (s_c + g)t_c}}{gt_w(t_c - t_w)\{t_c(s_c - s_w) + g(t_c - t_w)\}\left(\frac{n_1}{b_1}\right)(\alpha)} \quad (2.31)$$

$$\lambda_{c1}^* = \frac{-\frac{s_w - (s_w + g)t_w}{s_c - (s_c + g)t_c}\left(\frac{n_1}{b_1}\right)(2\alpha)K_1^* + \frac{\delta}{s_c - (s_c + g)t_c}}{\rho - \frac{(1-t_c)s_c}{s_c - (s_c + g)t_c}\left(\frac{n_1}{b_1}\right)\{1 - t_c - g(t_c + t_w)\}(2\alpha)K_1^*} \quad (2.32)$$

となる。(2.31)において、仮定 2.8 より、平衡点 K_1^* は $K_1^* > 0$ である。

このもとで、 $v = 1$ のときの (2.24) および (2.25) で構成される系を整理すると以下のようにになる。

$$\begin{pmatrix} \dot{K} \\ \dot{\lambda}_c \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} K \\ \lambda_c \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

ここで、 $R_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ で、

$$B_{11} = -\frac{(1-t_c)s_c}{s_c - (s_c + g)t_c}\delta + gt_w(t_c - t_w)\{t_c(s_c - s_w) + g(t_c - t_w)\}\left(\frac{n_1}{b_1}\right)2\alpha K_1^*$$

³ $K_1^* = 0$ も (2.24) の平衡点であるが、本稿の分析において、 $K_1^* = 0$ は意味を持たないので、ここではこれを記さない。

$$B_{21} = \frac{(1-t_c)s_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \left(\frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha)t_w \{1 - g(t_c - t_w)\} (2\alpha)\lambda_{c1}^* + \frac{s_w}{s_c} \left(\frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha)$$

$$B_{22} = \rho - \frac{gt_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \left(\frac{n_1}{b_1} \right) \{1 - t_c - g(t_c + t_w)\} (2\alpha K_1^*)$$

である。 R_1 の固有値 μ_1^1 および μ_2^1 は、

$$\mu_1^1 = -\frac{(1-t_c)s_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \delta + gt_w(t_c - t_w) \{t_c(s_c - s_w) + g(t_c - t_w)\} \left(\frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha K_1^*) \quad (2.34)$$

$$\mu_2^1 = \rho - \frac{gt_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \left(\frac{n_1}{b_1} \right) \{1 - t_c - g(t_c + t_w)\} (2\alpha K_1^*) \quad (2.35)$$

となる。ここで、固有値 μ_1^1 に対応する固有ベクトルをもとめると、

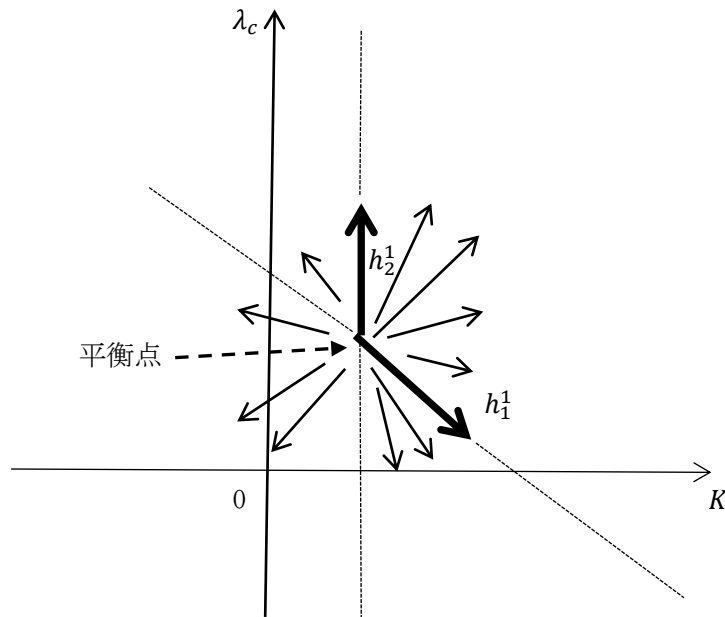
$$h_1^1 = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^1 - B_{22} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$

となり、固有値 μ_2^1 に対応する固有ベクトルをもとめると、

$$h_2^1 = \begin{pmatrix} k \\ \lambda_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、平衡点における安定性分析を行うと、(2.34)においては、 $\mu_1^1 > 0$ となる可能性が高く、(2.35)においても、 $t_c + g(t_c + t_w) > 1$ であれば、 $\mu_2^1 > 0$ である。このとき、 $v = 1$ に対応する平衡点(2.31)、(2.32)は不安定結節点であることがわかる。このときの位相図は図2.3のようになる。

図 2.3 $v = 1$ のとき

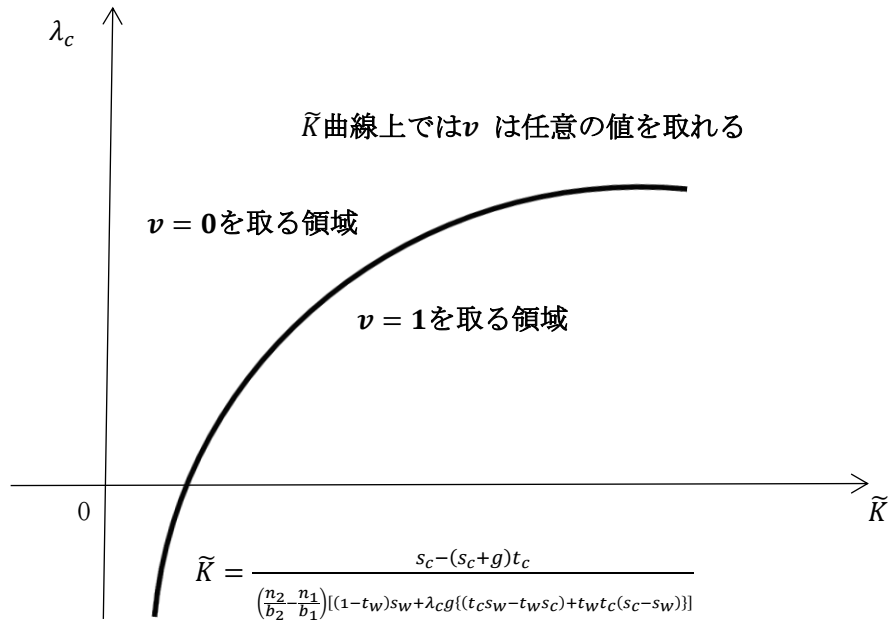


以上の考察より、資本家の戦略が、 $v = 0$ の領域で形成される平衡点は不安定結節点あるいは Saddle Point であり、 $v = 1$ の領域で形成される平衡点は不安定結節点であることがわかった。通常の最適化問題では、随伴変数 λ_c の任意の初期値に対し、制御を決定し、Saddle Point の対応する固有ベクトルを経由して平衡点に誘導するが、本稿の二部門二階級モデルでは、この手法が応用できない。そこで、本稿では、別の新たな制御の可能性を検討する。

2.3 新たな制御の可能性

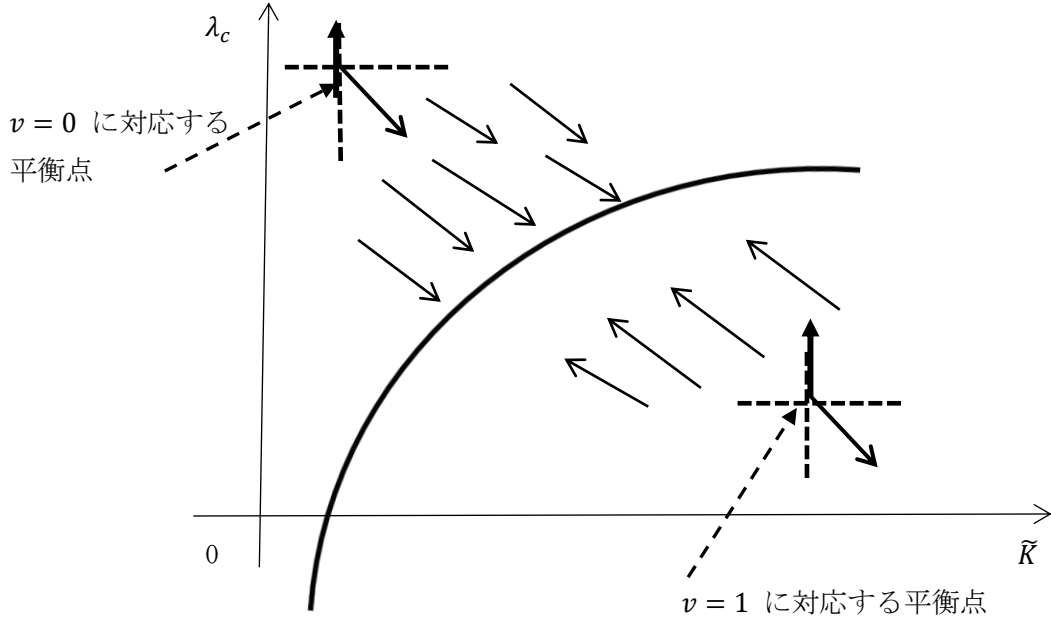
ここで、資本家の戦略 $v \in [0,1]$ が任意のケースについて考察を行う。 v が任意のケースとは、(2.21)で、 $M = 0$ となる条件を満たすときであった。すなわち、経済の資本ストックが(2.22)の水準にあるとき、資本家の戦略 v は任意となる。(図 2.1 を参照。) いま、(2.22)のグラフを描くと、図 2.4 のようになる。

図 2.4 v が任意のケース



ここで、図 2.2 と図 2.3 そして図 2.4 を合成したのが、図 2.5 である。

図 2.5 合成した位相図



したがって、図 2.5 に示すように、任意の初期値から出発した不安定な経路は、いずれ $\tilde{K}$ 曲線に到達する。したがって、 $\tilde{K}$ 曲線上で安定的な平衡点が存在するかが問題となる。ここで、(2.25) を再掲すると、

$$\dot{\lambda}_c = (\rho - \Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4)\lambda_c - \Theta \quad (2.36)$$

である。以下、 $\tilde{K}$ 曲線上における λ_c の運動について考察を行うため、 Λ_i および Θ には、 $K = \tilde{K}$ が代入されている。すなわち、

$$\Lambda_1 = \frac{gt_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \left[-\frac{1}{b_2} + \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha\tilde{K}) \{s_w - (s_w + g)t_w\} \right] v,$$

$$\Lambda_2 = \left\{ \frac{1}{b_2} + g \left(\frac{n_2}{b_2} - \frac{n_1}{b_1} \right) (2\alpha\tilde{K}) t_w \right\} v,$$

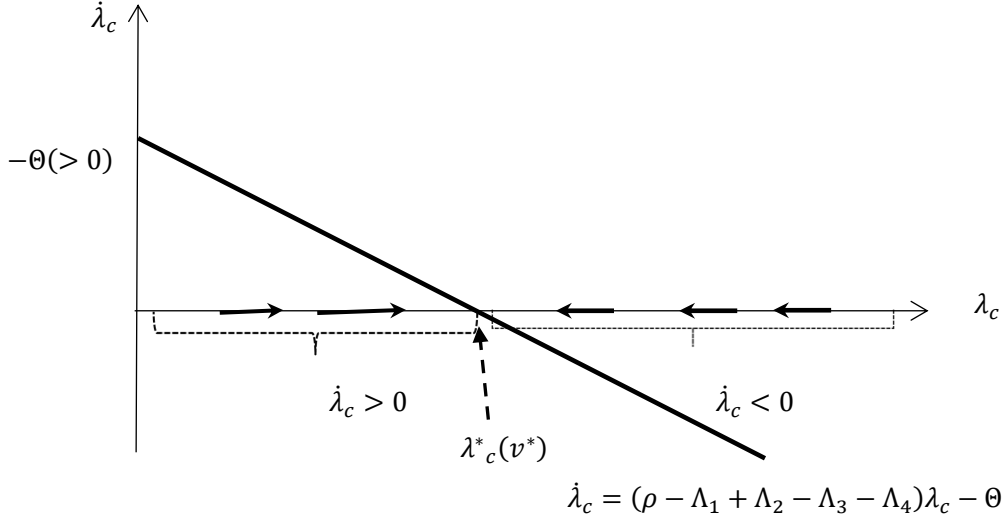
$$\Lambda_3 = \frac{gt_c}{s_c - (s_c + g)t_c} \left[\frac{1}{b_2} - \delta - \left(\frac{n_2}{b_2} \right) (2\alpha\tilde{K}) \{s_w - (s_w + g)t_w\} \right],$$

$$\Lambda_4 = \left\{ \frac{1}{b_2} - \delta - g \left(\frac{n_2}{b_2} \right) (2\alpha\tilde{K}) t_w \right\},$$

$$\Theta = \frac{1}{s_c - (s_c + g)t_c} \left[\frac{1}{b_2} (1 - v) - \frac{n_1}{b_1} (2\alpha\tilde{K}) \{s_w - (s_w + g)t_w\} v \right]$$

である。そして、 $\tilde{K}$ 曲線上で安定な平衡点が存在するためには、(2.36) のグラフが図 2.6 のようでなければならない。

図 2.6 λ_c の安定性



まず、条件 $-\theta > 0$ について考察を行う。この条件が成立するためには、仮定 2.8 より、 $s_c - (s_c + g)t_c > 0$ であるので、

$$\frac{1}{b_2}(1-v) < \frac{n_1}{b_1}(2\alpha\tilde{K})\{s_w - (s_w + g)t_w\}v \quad (2.37)$$

であることを必要とする。ここで政府は、(2.37)が成立するために、仮定 2.8 における t_w について、十分に低い税率を選択することが必要である。以下では(2.37)が成立していると仮定して分析を進める。

次に、問題となるのは、図 2.6 における直線の傾きが負であることである。すなわち、

$$\rho - \Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4 < 0 \quad (2.38)$$

であることを必要とする。ここで、 $\Lambda_2 > 0$ は確定であるが、政府が、仮定 2.8 における t_w について、十分に低い税率を選択すれば、 $\Lambda_1 > 0$ 、 $\Lambda_3 > 0$ および $\Lambda_4 > 0$ を実現することができる。以下、この点を補題に納める。

補題 2.2 $\tilde{K}$ 曲線上において、(2.36)が安定な平衡点を持つためには、政府は、仮定 2.8 における t_w について、十分低い税率を選択することが必要である。

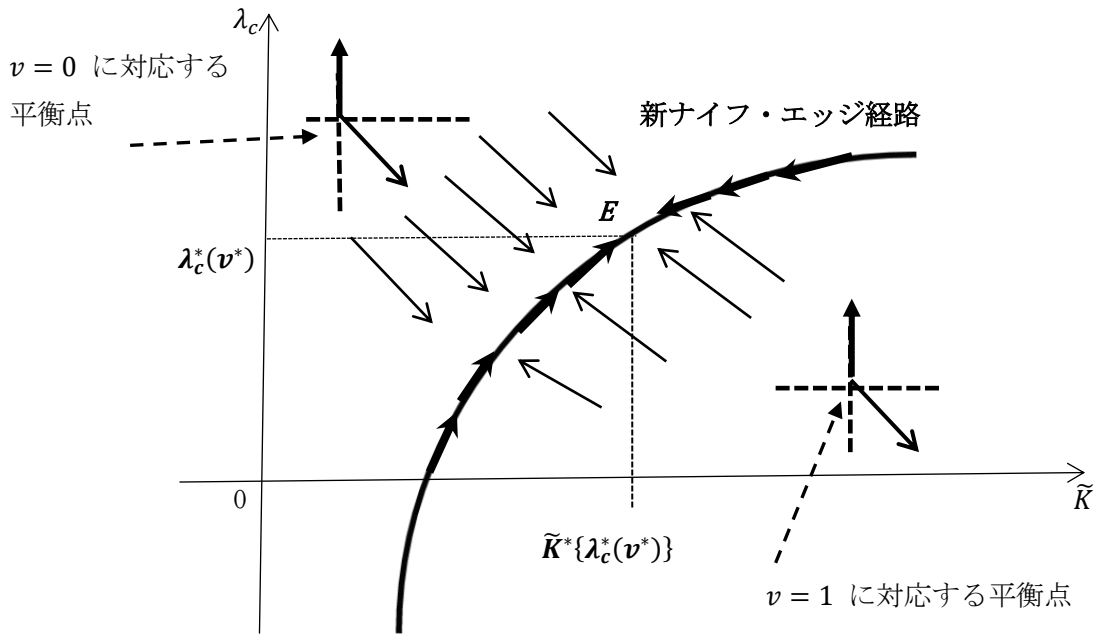
2.4 平衡点への制御プロセス

補題 2.2 のもとで、平衡点への制御プロセスを構築する。いま任意の初期値から出発した経路が、図 2.5 に示す $\tilde{K}$ 曲線(2.22)に到達したとする。すなわち、経路は、資本家の戦略 $v = 0$ あるいは $v = 1$ のもとで、 $\tilde{K}$ 曲線に到達する。このとき、 $\tilde{K}$ の曲線上では資本家の戦略 $v \in [0,1]$ は任意の値をとることができる。したがって、以下のような制御プロセスを構築する。

(P1) (2.24)において平衡点を達成する v^* 、すなわち $\dot{K} = 0$ を満たす v^* を計算する。

- (P2) v^* を持つ随伴方程式(2.36)における平衡点 $\lambda_c^*(v^*)$ を計算する。(図 2.6 を参照。)
 (2.36)は $K = \tilde{K}$ を(2.25)に代入して得られた随伴方程式であることに注意する。
- (P3) 任意の初期値から出発した経路が、図 2.7 における、 $\tilde{K}$ 曲線 (2.22) に到達した瞬間に、(2.24)で定まる資本ストック K と(2.36)で定まる変数 λ_c の組み合わせ (K, λ_c) の経路が、 $\tilde{K}$ 曲線上の経路を移動するように v を決定する。 $(\tilde{K}$ 曲線上の経路では、資本家の戦略 v は、任意の値をとることができる。)
- (P4) 図 2.7 より、 (K, λ_c) の経路は、 $\tilde{K}$ 曲線上を移動しつつ、いずれ予め計算されている平衡点 $(\tilde{K}^*, \lambda_c^*)$ に到達するが、その瞬間に、戦略 v を v^* に切り替える。この瞬間、図 2.7 における点 E は安定な平衡点となる。

図 2.7 新ナイフ・エッジ経路と安定性



(P1)–(P4)の制御プロセスを実行すると、経済を安定な平衡点に誘導することができるが、このプロセスは、通常の最適制御による経済のコントロール、すなわち、システムの固有ベクトルを使用して平衡点に誘導する手法とは異なる。

すなわち、本稿のモデルは、固有ベクトルではなく、(2.22)すなわち図 2.7 の、 $\tilde{K}$ の曲線上の経路を使用する。したがって、(2.22)は線形の生産関数を持つ経済の安定性の確保において重要な役割を果たす。ここで、(2.22)について以下のように定義する。

定義 2.1 (2.22)の $\tilde{R}$ 曲線上の経路を平衡点への新ナイフ・エッジ経路 (New knife-edge path for equilibrium) とよぶ⁴。

定義 2.1 のもとでこれまで行われた分析を以下の命題にまとめる。

命題 2.1 線形の生産関数をもつマクロ経済において、(P1)–(P4)の制御プロセスを実行することにより新ナイフ・エッジ経路を使用して、経済を安定な平衡点に導くことができる。

最後に、二部門二階級の資本主義経済の安定性を、新ナイフ・エッジ経路を用いて実現するための基本条件は(2.10)である。以下に、この重要な事象を命題にまとめる。

命題 2.2 資本主義の安定性が維持されるためには、資本蓄積とともに賃金率が増加しなければならない。

3. おわりに

以上、二部門二階級の資本主義経済を構成し、これに線形の生産関数を導入して、新ナイフ・エッジ経路を応用した新制御理論について考察した。この理論の特徴は、2階級のそれぞれに異なった税制を導入し、その税収を資本蓄積に投入するという点である。ただし、この理論が成立するためには、新ナイフ・エッジ経路自体が構築されなくてはならない。この点を可能にしているのは(2.10)であった。この帰結は、命題 2.2 に納められている。わが国のように、経済成長のもとで賃金率が上昇しないという現実のもとでは、この経路を形成することが困難となる。したがって、経済全体の分配構造の再構築が求められている。

次に、線形の生産関数を用いたときの資本家の戦略の特徴について言及する。Akimoto [2016]ではゲーム・モデルであったために、ゲームのプレイヤー（資本家、労働者および資本市場を擬人化した者）はナッシュ均衡をプレイすることができる。すなわち、プレイヤーの意思決定に関する動学的プロセスは、完全情報下におけるナッシュ均衡成立のゲーム理論的プロセスに吸収されている。

これに対し、本稿のモデルでは、資本家の戦略として、最適制御理論の Bang-Bang 制御が重要な役割を果たしている。すなわち、資本家の戦略は、経済の資本ストックが、(2.22)の $\tilde{R}$ より過大なときは、 $v = 1$ （すなわち、すべての資本ストックを消費財生産部門に投入する戦略）を、過小なときは $v = 0$ （すなわち、すべての資本ストックを資本財生産部門に投入

⁴ 本稿で使ったナイフ・エッジという用語は、ハロッド=ドーマー・モデルにおけるそれとは異なるので、新ナイフ・エッジ経路という言葉を用いた。

する戦略)となる。したがって、ある資本主義経済が初期段階にあるとすると、資本家は、消費財生産部門よりも、資本財生産部門に資本を投入し、経済の資本ストックを増加させる戦略をとる。しかし、その途上で、資本家の戦略に変化が現れる。資本家にとって、単に経済の資本ストックを増加させることではなく、資本ストックが新ナイフ・エッジ経路から逸脱しないように資本配分を決定することが最適戦略になる。そのとき資本家は、すべての時間において、新ナイフ・エッジ経路から逸脱しないように、資本配分戦略を決定しなければならない。こうした状況は、現実では、資本家が資本配分戦略について試行錯誤を行っている様子として映るかもしれない。そしてこの過程を経て、いずれ資本家にとって望ましい資本ストックに到達する。そのとき、資本家の戦略がひとつに定まり、経済は安定的な平衡状態になる。

以上のことから、資本主義経済では、その発展過程の途上において、試行錯誤的なプロセスを経験する時期があることが示唆される。そして消費者は、資本家のこうした一連の行動に対して、その都度、対応しながら消費を行わなければいけない。こうした現象は、見方によっては、経済発展の途上において、あたかも資本家が消費者を翻弄している状況のように映るかもしれない。今後残された課題としては、現実の資本主義経済の発展過程において、実際にこのような現象が発生してきたのかという点を検証することである。

最後に、新ナイフ・エッジ経路を実現する(P1)-(P4)の制御プロセスについて考察を行う。モデルの軸は(2.15)に示される最適制御問題として定式化され、資本家の戦略 v により経路が誘導される。もちろん、すべての時間において最大値原理が満たさなければならない。前述のように、資本家が、任意の初期値に対して、 $v = 0$ あるいは $v = 1$ の戦略を選択したのち、経路は、(2.22)の新ナイフ・エッジ経路に達する。(図2.7を参照。)その後は、この経路を維持したのち(P3)、平衡点に達した瞬間に、資本家は戦略を v^* に切り替える(P4)。繰り返しになるが、これらのすべての時間において最大値原理は維持されていなければならない。

このとき、1つの問題を指摘しなければならない。すなわち、(P1)-(P4)の制御プロセスを達成するためには、資本家は、そのすべてを事前に計算していなければならない。したがって、資本家は、政府の政策を含め、経済構造に関する情報をすべて知っていないとてはならないということである。このとき、資本家は、経済構造と政府の政策に関して完全情報下にある。ただし、ナイフ・エッジ理論の元祖であるハロッド=ドーマー・モデルでは、保障成長率 $G_w > \text{現実成長率 } G_t$ のときは、マクロ経済が投資を必要としているのにも関わらず、個々の企業の手元では過剰設備が発生していると判定される(逆は逆)。すなわち、マクロ経済情報は、個々の企業家(あるいは資本家)に、これとは異なるメッセージとして到達する。このとき、企業家は不完全情報下にあるといえる。しかしながら、現代の情報化社会において、個々の企業家は、マクロ経済状況について詳細な情報を得ることができる環境にある。このような状況下では、(P1)-(P4)の制御プロセスを達成することができる可能性があると考えられる。

また、政府についても資本家と同様に、経済構造に関する情報を知っている必要がある。

政府が行う経済政策は、(P1)―(P4)の制御プロセスにおいて2つの役割を果たしている。それは、新ナイフ・エッジ経路である $\bar{K}$ について、 $\bar{K} > 0$ とする役割と、 $\bar{K}$ で安定な平衡点に導く役割である。これらの役割を果たすために考えられる政府の経済政策は、仮定 2.8 を満たすように、資本家と労働者に課す税率と公共投資係数を選択することである。また、仮定 2.8 と補題 2.2 より、資本家と労働者の税率については、 $t_w < t_c$ として、労働者に課す税率 t_w については、特に低く設定する税制度にすることである。また、政府は、仮定 2.8 を満たすような経済政策を行うために、資本家と労働者の貯蓄率 s_c および s_w に関する情報にいつでもアクセスできるように統計情報を整えておく必要もある。政府が、こうした税制度や統計情報を基に経済政策を行うことで、資本家が利己的に戦略 v を選択する状況下で、最終的には、資本家自らに、経済を安定させる戦略 v^* を選択させることができるのである。

参考文献

- 秋本耕二[1985], 「2 部門・2 階級モデルにおける資本蓄積と所得分配」, 『九州大学経済論究』第 63 号, pp. 1-19.
- 秋本耕二[2001], 『技術革新と経済構造』九州大学出版会。
- Akimoto, K. [2016], “Can a Natural Economy Operate in Macro economy? A Caution for Deviation from Natural Economy”, *Italian Economic Journal*, Vol.2, pp.123-142.
- Basar, J.S. and G.J.Olsder.[1982], *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Academic Press.
- Basar, T., Haurie, A. and Ricci, G.[1985], “On the dominance of capitalism leadership in a feedback-Stackelberg solution of a differential game model of capitalism”, *Journal of Economics Dynamics and Control*, Vol. 9, pp.101-125.
- Domar, E.D.[1946], “Capital Expansion, Rate of Growth and Employment”, *Econometrica*, 14, pp.137-147.
- Domar, E.D.[1957], *Essays in the Theory of Economic Growth*, Oxford University Press.
- Goodwin, R.M.[1967], *A Growth Cycle, in Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Feinstein, C.H.(ed.), Cambridge University Press.
- Goodwin, R.M.[1983], *Essays in Linear Economic Structures*, Macmillan, London.
- Goodwin, R.M.[1986], “Swinging along Autostrada, Cyclical Fluctuation along the von Neumann Ray,” in *Competition, Instability, and Nonlinear Cycle*, Semmler, M.(ed.), Springer-Verlag.
- Harrod, R.F.[1939], “An Essay in Dynamic Theory”, *Economic Journal*, 49(193), pp.14-33.
- Harrod, R.F. [1948], *Towards a Dynamic Economics*, Macmillan St Martin’s Press.
- 稲田献一・宇沢弘文[1972], 『経済発展と変動』岩波書店。

- Kaldor,N.[1955-56],“Alternative Theories of Distribution”,*Review of Economic Studies*, 23(2),pp.83-100.
- Lancaster,K.[1973], “The Dynamic Inefficiency of Capitalism”,*Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.1092-1109.
- Malueg,D.A., and S. O. Tsutsui.[1997], “Dynamics R&D Competition with Learning,” *Rand Journal of Economics*, Vol.2,No.4,pp.751-772.
- Pohjola,M.[1983], “Nash and Stackelberg Solutions in a Differential Game Model of Capitalism,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.6,pp.173-186.
- Pohjola,M.[1985], “Growth Distribution and Employment Modelled as a Differential Games,” in *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2*, Feichtinger,G.(ed.),North- Holland.
- Pohjola,M.[1986], “Applications of Dynamic Game Theory to Macroeconomics,” in *Dynamic Games and Applications in Economics*, Bazar,T.(ed.),Springer-Verlag.
- Swan,T.W.[1956], “Economic Growth and Capital Accumulation”, *Economic Record*, 32(63),pp.334-361.
- Solow,R.M.[1956],“A Contribution to the Theory of Economic Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, 70,pp.65-94.
- Takahashi,H.,Mashiyama,K.and T.Sakagami.[2012],“Does the Capital Intensity Matter? Evidence from the Postwar Japanese Economy and other OECD countries,” *Macroeconomic Dynamics*, 16(S1), pp.103-116.
- Uzawa,H.[1961-62],“On a Two-Sector Model of Economic Growth”, *Review of Economic Studies*, 29(78),pp.40-47.
- Uzawa,H.[1962-63],“On a Two-Sector Model of Economic Growth II”, *Review of Economic Studies*,30(83),pp.105-118.